Roll No. .... Total Printed Pages - 8

F - 3769

B.Sc. (Part - III) Examination, 2022

(Old / New Course)

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks:50*

नोटः सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note: All questions are compulsory. Attempt any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई - 1/Unit - 1

1. (A) मान लो G एक समूह है। मान लो Aut (G), G के सभी स्वाकारिताओं के समुच्चय को दर्शाता है तथा A(G), G के सभी क्रमचयों का समूह है। तब सिद्ध कीजिए कि Aut(G),

P.T.O.

A(G) का एक उपसमूह होता है।

Let G be a group. Let Aut (G) denote the set of all automorphism of G and A (G) be the group of all permutations of G. Then prove that Aut (G) is a subgroup of A (G).

(B) सिद्ध कीजिए कि N (a), $a \in G$ का प्रसामान्यक, समूह G का एक उपसमूह होता है।

Prove that N (a), the normalizer of a, is a subgroup of the group G.

(C) यदि A, B एक समूह G के परिमित उपसमूह है, तब दर्शाइये कि

$$o(AxB) = \frac{o(A)\, o(B)}{o(A \cap xBx^{-1})}$$

If A, B are finite subgroups of a group G, then show that

$$o(AxB) = \frac{o(A)\, o(B)}{o(A \cap xBx^{-1})}$$

इकाई - 2/Unit - 2

2. (A) यदि f, वलय (R,+,·) से वलय $(R',+',\cdot')$ पर एक समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिक (Ker f, +, ·), (R, +, ·) की एक गुणजावली है।

If f is a homomorphism from a ring (R,+,·) into a ring $(R',+',\cdot')$, then prove that the triplate (Ker f, +, ·) is an ideal of (R, +, ·).

(B) $(I_6,+_6,x_6)$ पर निम्न बहुपदों का योग और गुणन ज्ञात कीजिए -

$$f(x)=5+4x+3x^2+2x^3, g(x)=1+4x+5x^2+x^3$$

जहाँ $I_6=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Find the sum and product of the following polynomials over the ring $(I_6,+_6,x_6)$:

$$f(x)=5+4x+3x^2+2x^3, g(x)=1+4x+5x^2+x^3$$

where $I_6=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(C) मानलो f एक R - माड्यूल M अंतर्क्षेपी एक R - माड्यूल N पर एक समाकारिता है। तब सिद्ध कीजिए कि f एक तुल्याकारिता है यदि और केवल यदि Ker f = {0}.

Let f be a homomorphism of an R - module M into an R - module N. Then prove that f is an isomorphism if and only if Ker f = {0}.

इकाई - 3/Unit - 3

3. (A) सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि V (F) का अरिक्त उपसमुच्चय W सदिश उपसमष्टि होगा, यदि और केवल यदि $a,b\in F$ तथा $\alpha,\beta\in w\Rightarrow a\alpha+b\beta\in w$

Prove that the non - empty subset W of a vector space V (F) is a subspace if and only if $a,b\in F$ *and* $\alpha,\beta\in w\Rightarrow a\alpha+b\beta\in w$

(B) मानलो $s=\{\alpha_1,\alpha_{2,.........,}\alpha_n\}$, n- विमीय एक सदिश समष्टि V(F) का एक आधार है। तब सिद्ध कीजिए कि V का प्रत्येक अवयव α अद्वितीयतः

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+.........+a_n\alpha_n;$$

जहाँ $a_1,a_2,.........\ a_n\in F$, के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

Let $s=\{\alpha_1,\alpha_{2,..........,}\alpha_n\}$ be a basis of a finite dimensional vector space V(F) of dimension n. Then prove that every element $\propto$ of V can be uniquely expressed as

$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ...+ a_n\alpha_n;$

where $a_1, a_2, ...a_n \in F$

(C) यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V (F) की दो उपसमष्टियाँ हैं, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

If W_1, W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space V (F), then prove that

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

इकाई - 4/Unit - 4

4. (A) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक n - विमीय सदिश समष्टि V(F), V_n(F) से तुल्याकारी होती है।

Prove that every n - dimensional vector space V (F) is isomorphic to V_n(F).

(B) मानलो V(F) तथा U(F) क्षेत्र F पर सदिश समष्टियाँ हैं। मानलो T: V$\rightarrow$U, V आच्छादक U से एक रैखिक रूपान्तरण है, जिसका कर्नेल है। तब दर्शाइये कि $V/_k \cong U$.

Let V (F) and U(F) be vector spaces over the field F. Let T: V$\rightarrow$U be a linear transformation

from V onto U with Kernel K. Then prove that $V/_k \cong U$

(C) यदि $\alpha = (x_1, x_2, x_3), \beta = (y_1, y_2, y_3)$ तथा

$$f(\alpha,\beta) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$$

तो f का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let $\alpha = (x_1, x_2, x_3), \beta = (y_1, y_2, y_3)$ and

$$f(\alpha,\beta) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$$

then find the matrix of f

इकाई - 5/Unit - 5

5. (A) यदि α, β एक आन्तर गुणन समष्टि के सदिश है, तो सिद्ध कीजिए कि $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ तथा ज्यामितीय निर्वचन दीजिए।

If α, β are vectors in an inner product space V, prove that $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ and give the geometrical interpretation.

(B) यदि V(F), x में बहुपदों का एक सदिश समष्टि है, जिसमें आन्तर गुणनफल निम्न रूप में परिभाषित है :

$$(p,q)=\int_{0}^{1} þ(x)\, q(x)\, dx$$

जहाँ $þ = þ(x),\ q = q(x) \in V$. तब $þ(x) = x+2,$

$q(x) = x^2 - 2x - 3$ के लिए ज्ञात कीजिए (i) $(þ, q)$ तथा (ii) $þ$ और q के बीच का कोण

If V(F) be a vector space of all polynomials in x in which an inner product is defined by

$(p,q)=\int_{0}^{1} þ(x) q(x)\, dx$ where $þ = þ(x)$

and $q = q(x) \in V$

Then for $þ(x) = x+2,\ q(x) = x^2 - 2x - 3$,

find (i) $(þ, q)$ and (ii) between $þ$ and q .

(C) यदि α, β किसी आन्तर गुणन समष्टि V(F) के सदिश हैं तथा $a, b \in F$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$4(\alpha,\beta)=\|\alpha+\beta\|^2-\|\propto-\beta\|^2+i\|\alpha+i\beta\|^2-i\|\alpha-i\beta\|^2$$

If α, β are vectors in an inner product space V(F) and $a, b \in F$, then prove that

$$4(\alpha,\beta)=\|\alpha+\beta\|^2-\|\propto-\beta\|^2+i\|\alpha+i\beta\|^2-i\|\alpha-i\beta\|^2$$